

# Structures hiérarchiques en géographie : des modèles linéaires aux modèles non linéaires (lois de puissance et corrections log-périodiques)

**Maxime Forriez, Philippe Martin**

Laboratoire ESPACE UMR 6012, CNRS - Université d'Avignon et des Pays de Vaucluse  
74, rue Pasteur Case 17 – 84029 Avignon Cedex, France

[maximeforriez@hotmail.fr](mailto:maximeforriez@hotmail.fr)

[philippe.martin@univ-avignon.fr](mailto:philippe.martin@univ-avignon.fr)

## MOTS - CLÉS

Géographie  
Invariance d'échelle  
Covariance d'échelle  
Dépendance d'échelle  
Loi fractale log-périodique

## RÉSUMÉ

La loi de puissance (et spécialement la loi rang-taille) est utilisée dans de nombreuses modélisations empiriques en géographie. Souvent, on peut observer une oscillation des points expérimentaux sur les graphiques bi logarithmiques. Jusqu'alors ces oscillations étaient interprétées comme des artefacts. Grâce à des développements mathématiques récents, on peut modéliser ces fluctuations par une loi fractale log-périodique comme nous allons le montrer.

## KEY WORDS

Geography  
Scale invariance  
Scale covariance  
Scale dependence  
Fractal log-periodic law

## ABSTRACT

### **Hierarchical structures in geography: From linear models to non linear models (power laws and log-periodic corrections)**

The power laws, and specially the rank size laws, are everywhere in many empiric models in geography. But, we can see often oscillations in this experimental curve. Until then, these oscillations had interpreted as artefacts. Actually, thanks to mathematic laws we can model theses fluctuations with a fractal log-periodic law. We are going to demonstrate in this paper.

$$V_n = V_0 \left( \frac{1}{r_n} \right)^\delta \quad (1)$$

## 1. Introduction

Nous utilisons, en géographie, depuis près d'un siècle une « loi » dite : rang-taille attribuée à George Kingsley Zipf (1932 ; 1935 ; 1941 ; 1949) dans sa version discrète, et à Vilfredo Pareto (1896) dans sa forme continue (Pumain, 2006a). Cette relation empirique montre que si l'on reporte une variable  $V$ , par exemple la population urbaine, en fonction du logarithme de l'inverse du rang  $r_n$ , la distribution s'ajuste à une loi de puissance de la forme :

Plus tard, cette loi empirique a été théorisée sous la forme d'une « loi fractale » par Benoît Mandelbrot (1975), et l'exposant de « Zipf » est devenu une dimension fractale. Nous avons donc là une loi analogue à une loi d'échelle où le rang joue le rôle de la résolution. Ce qu'apportent les travaux de Benoît Mandelbrot, outre l'introduction de cette relation empirique dans le corpus théorique de la géométrie fractale sur lequel nous aurons à revenir, c'est un éclairage sur la logique profonde de cette structure d'ordre dont l'ubiquité est avérée. « Quelque chose est

l'inverse de quelque chose d'autre » note ce mathématicien (1997, p.193) qui ne fait que rappeler une figure classique : ce qui est petit se trouve en grand nombre et ce qui est grand est en petit nombre ou inversement. Le classement réalisé sur la distribution expérimentale ne fait bien sûr que mettre en évidence les modalités de variation des différences inscrites dans la série statistique, modalités qui seront rapprochées de celles manifestées par la variation du rang.

En fait, la distribution expérimentale est comparée à une distribution théorique dont le seul intérêt réside dans sa structure interne. Celle-ci est généralement exprimée par le rang, ou par des rétro fréquences. Les calculs montrent que l'exposant  $\delta$  est souvent proche de 1 comme en témoignent différents travaux expérimentaux ou théoriques (Schroeder, 1991 ; Bak, 1999). Il faut rappeler aussi que les objets mesurés pour constituer la distribution peuvent être des objets définis par leurs caractéristiques fonctionnelles, comme le nombre de personnes habitant une agglomération, et/ou par leur caractère spatial, comme la surface couverte par une ville, etc. Dans ce dernier cas, les modalités du découpage territorial, le choix des limites retenues, peuvent avoir une influence notable sur la structure des distributions comme l'a montré Jean Laherrère (1996). En toute logique, les limites devraient être celles produites par le système lui-même dans une dynamique d'auto constitution, par clôture logique et séparation de ce qui est autre. Pour une ville, cela revient à rechercher une sorte de frontière, ou, au moins, une frange en marge de l'urbain et du non urbain, particulièrement à partir d'une analyse spatiale et scalaire de la morphologie urbaine (Al Khalifeh et Martin, 2007 ; Al Khalifeh, 2008). Ce travail est évidemment très lourd et ne peut être envisagé à ce stade surtout sur une base mondiale. Cela étant, il est logique de penser, d'une part, que la série des agglomérations proposée par l'ONU tient compte de cette difficulté, mais il faut aussi remarquer, d'autre part, que notre objectif est ici principalement méthodologique, ce qui permet de ne pas chercher l'excellence au niveau des données. Cela pourra être fait dans un second temps et conduire à des conclusions plus fines sur le réseau urbain mondial. Dans cette perspective, nous limiterons volontairement nos interprétations.

Ces types d'approche et de questionnement se retrouvent bien sûr pour des objets relevant de la géographie physique, qu'ils soient des d'objets spatiaux comme des bassins versants, etc. (Korcak, 1940 ; Fréchet, 1941 ; Depraetere, 1991) ou qu'ils soient des attributs fonctionnels (débit, etc.). L'exemple le plus connu étant peut-être celui de la magnitude des tremblements de terre (Dubois, 1995).

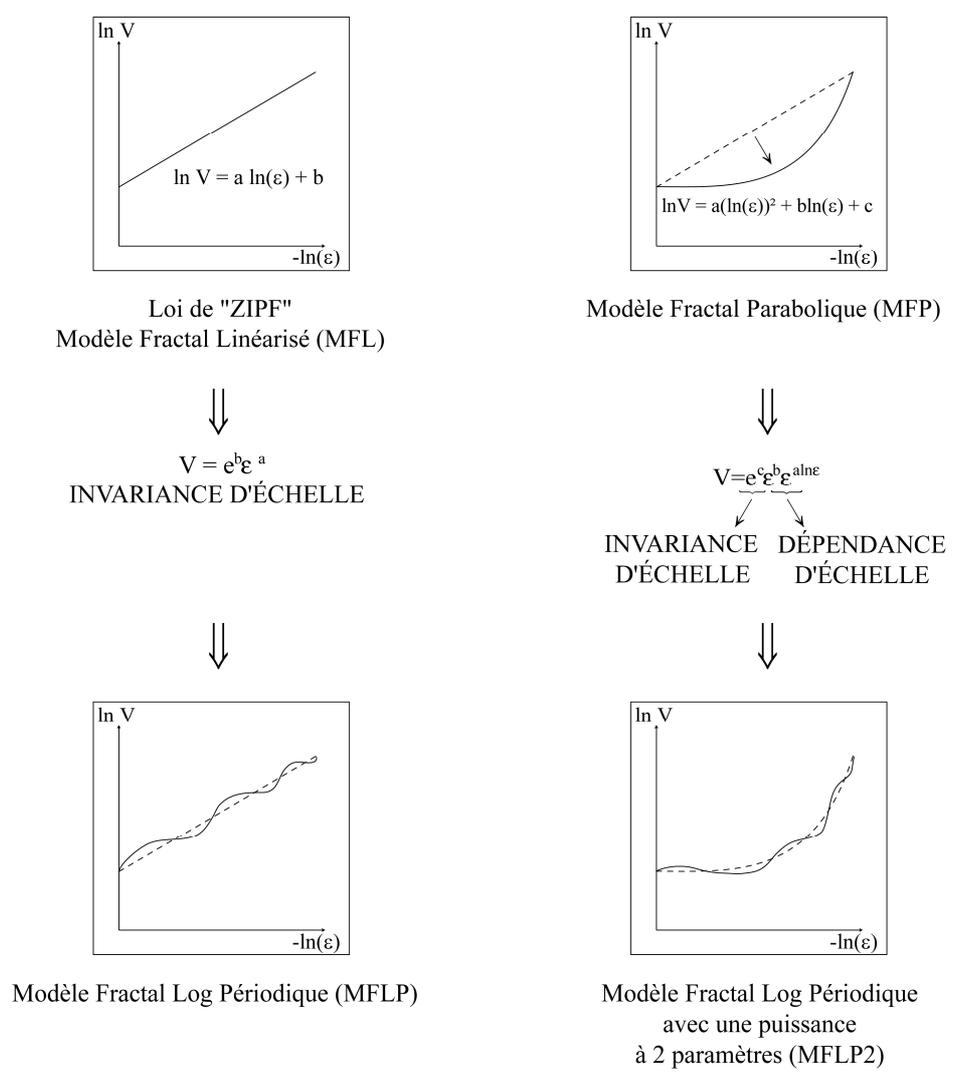
Dans cette perspective, la question est donc de savoir si le modèle puissance pour ne pas l'appeler « loi », est seulement une bonne solution de description, une bonne solution pour résumer l'information (ou une partie de l'information) contenue dans la distribution - auquel cas c'est un outil à ranger au même rang que les

régressions ou les analyses factorielles - ou s'il traduit la manifestation de relations, de tensions, intrinsèquement liées aux fonctionnements et aux contraintes structurelles qui correspondent à une organisation sur des bases communes à la nature et à la sphère anthropique ? Ce problème est un questionnement ancien, comme le souligne Denise Pumain (2006a) : « Que dans tous les pays du monde et à toutes les époques, il y ait une hiérarchie urbaine telle que le nombre des villes suit une progression géométrique inverse de leur taille, constitue une caractéristique remarquable, invariante par rapport aux systèmes politiques, économiques et culturels ». Dans la seconde hypothèse, qui est aussi la nôtre, il est logique de chercher à faire entrer ce modèle puissance et ses avatars dans un cadre théorique. En ne retenant que la première hypothèse, ces développements n'auraient guère de sens.

Il est peut-être ici utile de rappeler les modèles isométriques et allométriques de croissance qui mettent en œuvre une dynamique portée par un flux de matière, d'énergie et d'information dans un cadre qui est celui d'une compétition, d'une concurrence rendue inévitable en partie par le caractère limité des ressources et/ou la finitude de l'espace tangible. Ceci peut être décliné pour le réseau urbain caractérisé soit par la taille surfacique des organismes, soit par le niveau de sa population. Il n'est dès lors pas étonnant d'obtenir une relation puissance entre cette surface et la taille de la population (Le Bras, 2000, p.112). La modification de la hiérarchie urbaine correspondant, en fait, à une variation soit unitaire, soit locale - en termes d'échelles -, du taux de croissance urbaine (Guérin - Pace, 1993).

Cela étant, le modèle puissance, même s'il révèle une dimension d'une grande généralité, reste un archétype, une solution théorique qui est globalement réalisée, mais qui est aussi insuffisante en raison, d'une part, d'une fréquente disposition en arc de cercle (courbure) qui apparaît dans les graphiques bi logarithmiques, et en raison, d'autre part, d'oscillations, de fluctuations de ces mêmes distributions de points, tant dans le cas linéaire (modèle puissance stricte ou modèle fractal linéaire (Laherrère, 1996)) que dans celui où se manifeste une courbure (modèle fractal parabolique (Laherrère, 1996 ; Laherrère et Sornette, 1998)) (figure 1).

Il apparaît donc quatre situations possibles (figure 1) : le Modèle Fractal Linéarisé (MFL), le Modèle Fractal parabolique (MFP), le Modèle Fractal Log Périodique (MFLP) et le Modèle Fractal Log Périodique avec une puissance à deux paramètres (MFLP2). Le problème est ainsi nettement plus complexe et serait grandement précisé s'il pouvait être intégré dans un soubassement théorique formel. Cela est aujourd'hui possible avec la théorie de la relativité d'échelle de Laurent Nottale (1993, 1998). Avec cet outil il est non seulement possible de généraliser davantage ces lois rang-taille, mais aussi de proposer des méthodes déductives qui



**Figure 1. Schéma des différents types de loi de puissance**

permettront d'obtenir de meilleurs ajustements numériques, donc d'accroître leurs dimensions explicative et prospective.

Cet article, par rapport à l'imposante littérature détaillant les subtilités des lois rang-taille (Pumain, 2006b), vise juste à proposer un développement théorique, basé sur les apports de Laurent Nottale (<http://luth.obspm.fr/~luthier/nottale/>) que nous pensons utile à faire connaître aux géographes. Il s'agira de présenter un début d'analyse mathématique des lois rang-taille, ainsi qu'une approche purement conceptuelle de certains éléments de la théorie de la relativité d'échelle de Laurent Nottale (1993 ; 1998).

Pour des détails sur cette construction, nous renvoyons les lecteurs aux travaux de son auteur. Cela étant, il nous faut quand même, tout d'abord, rappeler les trois principes premiers sur lesquels repose cette théorie. C'est d'abord, le principe de relativité. Il s'énonce de la manière suivante : « les lois de la nature doivent être valides quel que soit le système de coordonnées choisi » (Einstein, *in* Nottale, 1998). C'est ensuite, le principe de covariance. Il met en œuvre le principe de relativité. Ce

principe porte sur les équations qui nous servent à décrire ces lois. Ici, les équations doivent conserver la même forme mathématique (la plus simple possible). Enfin, le principe d'équivalence assure la liaison entre le principe de relativité et celui de covariance pour un « objet » donné. Dans cette théorie l'approche fractale et l'instrumentalisation des équations différentielles d'échelle permettent de retrouver le formalisme des lois puissances comme étant la solution d'équations différentielles.

## 2. La position du problème

Les lois rang-taille ont été utilisées par Vilfredo Pareto (1896) en économie (Mandelbrot, 1997) et, successivement (Armatte, 1995), en géographie par Georges Kingsley Zipf (1949) et par Robert Gibrat (1931). Elles ont un usage semblable à celui des lois statistiques log-normales.

L'idée d'utiliser ces lois, en géographie, était en rapport avec, entre autres choses, la théorie des lieux centraux de Walter Christaller (1933) ou d'August Lösch (1940),

théorie qui n'est pas très satisfaisante dans beaucoup de cas expérimentaux, et cela même si elle a pu donner lieu à des développements de nature fractale (Arlinghaus, 1985, Arlinghaus et Arlinghaus, 1989, Lam et De Cola, 1993, François *et al.*, 1995). Quoi qu'il en soit, pour que les lois rang-taille aient un sens, il faut, d'une part postuler l'existence d'un réseau urbain, c'est-à-dire de quelque chose qui lie ensemble les agglomérations et dont rend compte le niveau de la population urbaine, et d'autre part postuler que ce réseau est hiérarchisé selon un ordre décroissant.

## 2.1. Les lois fractales invariantes d'échelle

Le premier apport théorique complémentaire a été l'intégration de la loi rang-taille dans la théorie empirique de Benoît Mandelbrot (1975) connue sous le nom de géométrie fractale. En effet, l'équation (1) comprend un exposant  $\delta$  qui sera désormais identifié à une dimension fractale. Cette équation est également identifiée au cas d'invariance d'échelle, soit celui d'une variation constante dans l'ordre des échelles.

Aujourd'hui, nous proposons d'identifier cette loi aux lois d'échelle développées par Laurent Nottale qui offrent une compréhension plus aboutie des structures fractales découvertes par Benoît Mandelbrot. Dans cette théorie, la loi précédente

$$V = V_0 \left( \frac{1}{\varepsilon} \right)^D \quad (2)$$

devient la solution d'une équation différentielle d'échelle du premier ordre de la forme :

$$\frac{dV(\varepsilon)}{d \ln \varepsilon} = -DV(\varepsilon) \quad (3)$$

La solution de l'équation (3) est de la forme :

$$V(\varepsilon) = V_0 \left( \frac{\lambda}{\varepsilon} \right)^D \quad (4)$$

On peut par conséquent rapprocher l'équation (1) de l'équation (4). Il suffit de poser :

$$\begin{cases} \lambda = 1 \\ \varepsilon = r_n \\ \delta = D \end{cases}$$

$\lambda$  correspond à la constante d'intégration qui sera identifiée à ce que l'on appelle l'échelle de coupure interne, c'est-à-dire à la résolution à partir de laquelle un phénomène devient fractal (dépendance d'échelle) ou, au contraire, non fractal (indépendance d'échelle). Dans le cas des lois rang-taille, elle sera égale à 1. Cependant, le simple fait d'avoir identifié  $\lambda = 1$  nous autorise à prendre n'importe quelle valeur pour  $\lambda$ . En effet, le fait de modifier cette constante n'aura pour conséquence que de translater la courbe vers la gauche

ou vers la droite.  $\varepsilon$  est une résolution.  $\delta$  correspond à la dimension fractale et  $V_0$  à la valeur initiale de la série.

## 2.2. L'exemple d'une loi : rang vs population urbaine

Nous allons maintenant présenter la relation classique entre le rang et la population urbaine, classée en ordre décroissant qui est l'archétype des lois rang-taille en géographie. Par analogie et hypothétiquement, nous considérerons le rang comme une résolution. On la trace généralement sur un graphique bi logarithmique. Par commodité mathématique, nous utiliserons le logarithme népérien. Cet espace bi logarithmique est proche de celui appelé espace des échelles par Laurent Nottale (1993, 1998). Toutefois, ce n'est qu'un espace de grandeurs qui dépendent de l'échelle. Pour éviter toute confusion, nous l'appellerons : espace parétien ordonné. L'équation (4) devient :

$$\ln V = \ln V_0 + D \ln \left( \frac{\lambda}{\varepsilon} \right) \quad (5)$$

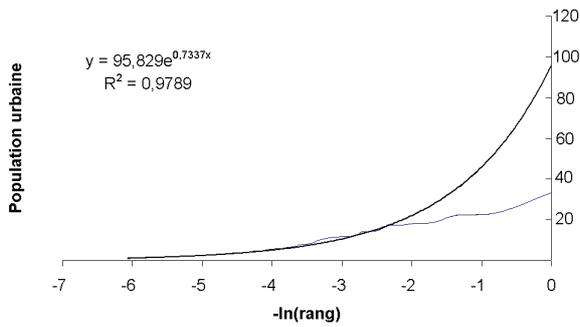
Autrement dit, il s'agit sur un graphique bi logarithmique d'une droite dans laquelle la pente correspond à la dimension fractale  $D$  (figure 3). Il faut remarquer que la dimension fractale correspond, elle, à la dérivée de  $\ln V$  par rapport au  $\ln \varepsilon$  :

$$\frac{d \ln V}{d \ln \varepsilon} = -D \quad (6)$$

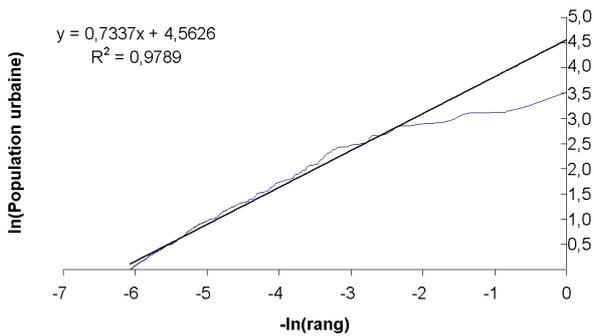
Nous proposons, pour tester cette loi, d'étudier la base des données ONU qui recense les 435 premières villes ou conurbations de rang mondial disponibles sur le web (<http://www.populationdata.net/palmaresvilles.php>).

Nous avons utilisé les données de cette base telles qu'elles. Évidemment, le découpage administratif fourni des agglomérations peut parfois être vigoureusement discuté (Pumain, 1982 ; Moriconi-Ebrard, 1993, Pumain et Moriconi-Ebrard, 1997). Toutefois, ces données sont ici uniquement utilisées pour illustrer une méthode analyse, et non, dans le but d'expliquer le réseau urbain mondial, même si comme l'écrit Denise Pumain (2006a, p. 238), « [les lois rang-taille, entres autres] sont caractéristiques de l'organisation des villes en réseaux, en systèmes, à un niveau macrogéographique, à l'échelle d'une grande région, d'un État ou d'un continent, voire du Monde ».

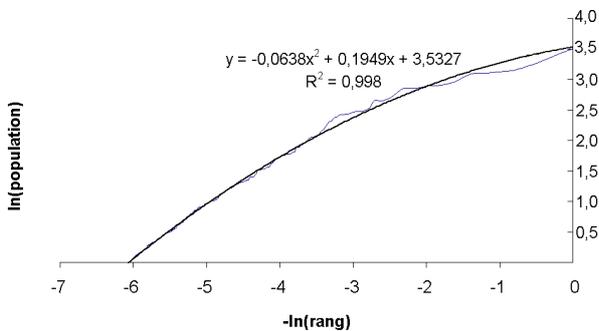
On constate que l'ajustement statistique linéarisé n'est pas satisfaisant. D'ailleurs, il est probable qu'aucune série ne correspond parfaitement à une loi puissance stricte. En effet, sur la figure 2, on voit très bien qu'à partir de la valeur  $-2$ , l'ajustement diverge complètement par rapport aux données analysées. Pour y remédier, il suffit d'ajuster un polynôme du second degré dans l'espace parétien ordonné (Laherrère, 1996) (figure 4).



**Figure 2. Ajustement linéaire entre  $-\ln(\text{Rang})$  et la Population**



**Figure 3. Ajustement puissance entre  $-\ln(\text{Rang})$  et  $\ln(\text{Population})$**



**Figure 4. Ajustement d'un polynôme du second degré entre  $-\ln(\text{Rang})$  et  $\ln(\text{Population})$**

Est-ce une curiosité ? Une anomalie ? Est-ce la preuve que l'approche fractale est inadaptée pour une étude géographique ? Vraisemblablement pas ! Nous allons montrer, en étendant le concept d'invariance d'échelle à celui de dépendance d'échelle, comment il est possible de faire fond sur la géométrie fractale pour mieux décrire cette structure d'ordre qui transparaît dans le réseau urbain mondial sommairement rendu par le niveau des populations des agglomérations.

### 2.3. La dépendance d'échelle

L'invariance d'échelle n'est qu'un cas très singulier de l'expression de la fractalité d'une distribution. Le cas le

plus général est celui de la dépendance d'échelle, dans laquelle l'invariance d'échelle n'est qu'un cas particulier (cas le plus simple à un rapport constant). Pour ce faire, il nous faut compliquer, quelque peu, l'équation différentielle d'échelle (3). En effet, on obtient la dépendance d'échelle en posant l'équation différentielle du premier ordre suivante :

$$\frac{dV(\varepsilon)}{d \ln \varepsilon} = b + (D - D_T)V(\varepsilon) \quad (7)$$

Le simple fait d'avoir ajouté une constante  $b$  dans l'équation différentielle (3) permet de changer la nature de la fractalité : on passe d'une dépendance d'échelle simple (invariance d'échelle) à une dépendance d'échelle plus complexe dans laquelle l'invariance est brisée au-delà d'une certaine échelle de transition. L'équation (7) se résout en :

$$V(\varepsilon) = V_0 \left[ 1 + \left( \frac{\lambda}{\varepsilon} \right)^{D-D_T} \right] \quad (8)$$

où  $D_T$  correspond à la dimension topologique, ici  $D_T$  vaut zéro, et  $V_0$  correspond à la valeur initiale.

## 3. La loi rang-taille parabolique

Nous avons pu ajuster dans l'espace parétien ordonné une parabole (figure 3), ce qui correspond à une équation de la forme :

$$\ln V = a \left( \ln \left( \frac{\lambda}{\varepsilon} \right) \right)^2 + b \ln \left( \frac{\lambda}{\varepsilon} \right) + c \quad (9)$$

ce qui se transforme en :

$$V = e^c \left( \frac{\lambda}{\varepsilon} \right)^{a \ln \left( \frac{\lambda}{\varepsilon} \right) + b}$$

$c = V_0'$  et on appellera la constante  $e^c = C$

$$V = C \left( \frac{\lambda}{\varepsilon} \right)^{a \ln \left( \frac{\lambda}{\varepsilon} \right) + b} \quad (10)$$

Dans l'équation (10), nous constatons que l'exposant est devenu variable. En effet, si on reprend, en vertu du principe de covariance, la définition de la dimension fractale de l'équation (6), à savoir la dérivée de  $\ln V$  par rapport à  $\ln \varepsilon$ , on obtient donc :

$$D(\ln \varepsilon) = \frac{d \ln V}{d \ln \varepsilon} = 2a \ln \varepsilon + b \quad (11)$$

$2a \ln \varepsilon + b$  qui correspond à la définition de la dimension fractale de Laurent Nottale, est devenue variable.

On notera en outre que  $2a \ln \varepsilon + b$  correspondrait *grosso modo* à la variable  $z$  avec  $z = a \cdot \ln(x-x_0) + b$  de la loi de Gibrat.

Nous allons maintenant essayer de trouver l'origine de la loi parabolique. Nous savons que d'après l'équation (2) :

$$\frac{d \ln V}{d \ln \varepsilon} = D \quad (12)$$

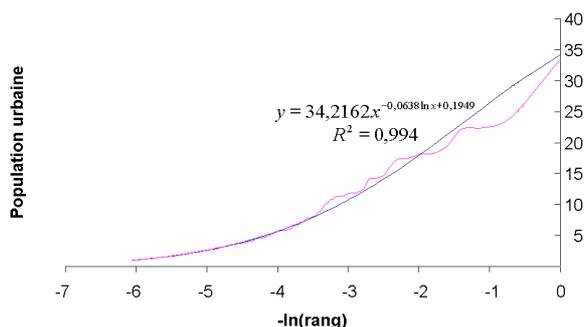
or ici  $D = D(\ln \varepsilon) = 2a \ln \varepsilon + b$ . Nous introduisons cette donnée dans l'équation (12) ce qui nous donne :

$$\frac{dV}{d \ln \varepsilon} = 2aV \ln \varepsilon + bV \quad (13)$$

ce qui s'intègre en séparant les variables.

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} dV &= (2a \ln \varepsilon + b) d \ln \varepsilon \\ \Leftrightarrow \ln V &= a(\ln \varepsilon)^2 + b \ln \varepsilon + c \\ \Leftrightarrow V &= C \varepsilon^{a \ln \varepsilon + b} \quad (14) \end{aligned}$$

Ce résultat, illustré par la figure 5, est remarquable à plus d'un titre. Il permet de proposer une solution au problème posé par Jean Laherrère dans son Compte Rendu à l'Académie des Sciences (1996), mais aussi de définir un attracteur qui montre une stabilité exceptionnelle dans l'espace parétien ordonné, de la structure observée sur la figure 4.



**Figure 5. L'ajustement par une double loi puissance de la série  $-\ln(\text{Rang})$  vs Population**

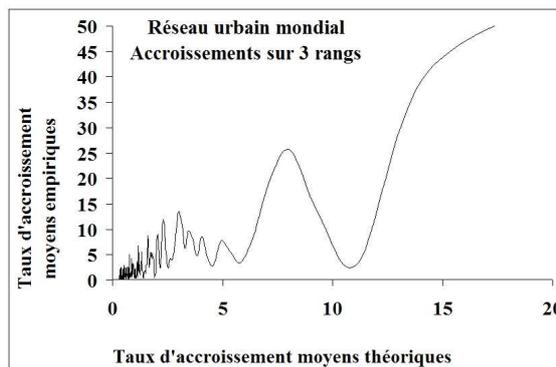
Cependant, l'interprétation reste délicate. En effet, comme toutes les lois d'échelle, l'équation différentielle d'échelle parabolique est dans sa forme absolue. Autrement dit, les populations urbaines peuvent croître, la forme de la relation restera inchangée. Il est donc logique que l'ajustement parabolique soit toujours plus proche de la structure analysée. Toutefois, on peut obtenir un meilleur ajustement avec un modèle non linéaire intégrant une correction log-périodique de la loi de puissance.

Il est également possible de calculer un taux d'accroissement expérimental de la population d'un rang sur l'autre ( $P_{r_1} \rightarrow P_{r_2}$ ) ou d'un rang  $P_{r_1}$  à un rang  $P_{r_x}$ .

$$\text{Soit } T_A = \frac{P_{r_n} - P_{r_{n+1}}}{P_{r_{n+1}}} \times 100$$

Ce taux peut ensuite être porté en fonction de l'inverse du rang. Ce graphique montre des oscillations nettes qui sont organisées hiérarchiquement. Celle qui concerne les rangs les plus faibles est ample, la suivante l'est moins, la troisième l'est encore moins et se décompose en « sous oscillations » selon un principe d'échelle, etc. (cf. figure 6).

De cette distribution il est ensuite possible, afin de mieux percevoir ces oscillations en échelle, de retirer un taux d'accroissement théorique calculé à partir de la fonction :  $y = 34,2162x^{-0,0638 \ln x + 0,1949}$ , puis de porter ce taux théorique ( $t_A$ ) en fonction du taux empirique ( $T_A$ ). Le résultat est donné dans la figure 6. On observe alors nettement une fluctuation log-périodique qui peut être modélisée.



**Figure 6. Relation entre le taux d'accroissement théorique et le taux d'accroissement empirique dans le réseau urbain mondial ( $P_{r_n} \rightarrow P_{r_{n+3}}$ )**

On notera que l'oscillation entre 0 et 5 présente bien une structuration du phénomène selon deux échelles : l'une déployée sur la totalité de l'intervalle, l'autre, à une autre échelle, emboîtée dans la première et qui est donc plus détaillée. L'accroissement, au-delà de la porteuse, est donc beaucoup plus complexe qu'on ne le pense généralement. À l'inverse la répartition sur un graphique bi logarithmique des points autour de l'ajustement principal (porteuse) n'est pas un artéfact et doit être étudié comme tel, sinon on ne voit pas pourquoi ces points ne seraient pas distribués aléatoirement.

#### 4. La correction log-périodique des lois de puissance

Cette correction a été utilisée, par Didier Sornette (2000), en science de la terre et en économie. Cela étant, les physiciens la connaissent depuis de nombreuses décennies. Elle était alors principalement utilisée pour des phénomènes physiques tels que la température. L'apport de Didier Sornette a été de l'appliquer au temps.

#### 4.1. La correction log-périodique et l'invariance d'échelle

Didier Sornette a essayé de modéliser l'oscillation observée en utilisant une dimension fractale complexe. Rappelons qu'un nombre complexe est un nombre  $z$  tel que  $z = a + ib$ , où  $a$  est appelé la partie réelle et  $ib$  la partie imaginaire avec  $i^2 = -1$ . Ainsi, on arrive à modéliser cette oscillation en utilisant la forme trigonométrique des nombres complexes.

En effet,

$$\begin{aligned} V &= V_0 \varepsilon^{a+ib} = V_0 \varepsilon^a \varepsilon^{ib} = V_0 \varepsilon^a e^{ib \ln \varepsilon} \\ &= V_0 \varepsilon^a [\cos(b \ln \varepsilon) + i \sin(b \ln \varepsilon)] \end{aligned}$$

La partie réelle est

$$\text{Re}(\varepsilon) = V_0 \varepsilon^a \cos(b \ln \varepsilon) \quad (15)$$

Elle correspond à une fluctuation log-périodique. Il faut remarquer qu'il est très courant dans des sciences, comme la physique, d'utiliser les nombres complexes pour ensuite revenir aux nombres réels, ce qui, d'un point de vue analytique, est correct puisque les nombres complexes sont une « extension » des nombres réels. Cette partie réelle correspondant à une fluctuation log-périodique de l'invariance d'échelle.

#### 4.2. La correction log-périodique et la dépendance d'échelle

Si l'on revient à la théorie de la relativité d'échelle, il faut trouver une équation différentielle d'échelle donnant cette fluctuation log-périodique. La démonstration est plus compliquée que celle de l'invariance d'échelle, mais elle aura pour effet de satisfaire au principe de covariance : la dépendance d'échelle log-périodique aura la même forme mathématique, mais plus sophistiquée, que la dépendance d'échelle puissance (Nottale, 1997).

Avant de poursuivre le raisonnement, il faut opérer un changement de variable et poser :  $\varepsilon = \left| \frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_c} \right|$ , où  $\frac{1}{r_c}$

correspond à ce que l'on appelle la valeur critique de manière générale, et dans le cas des lois rang-taille, on appellera cette valeur le rang critique.

Pour obtenir une telle fluctuation, il faut reprendre l'équation (3) :

$$\frac{dV(\varepsilon)}{d \ln \varepsilon} - DV(\varepsilon) = 0 \quad (16)$$

On exige que l'équation (16) ne soit plus égale à zéro :

$$\frac{dV(\varepsilon)}{d \ln \varepsilon} - DV(\varepsilon) = \chi(\varepsilon) \quad (17)$$

Cependant, en vertu du principe de covariance, on exige que  $\chi(\varepsilon)$  corresponde à une équation différentielle de la même forme que l'équation (16).

On obtient donc :

$$\frac{d\chi(\varepsilon)}{d \ln \varepsilon} - D' \chi(\varepsilon) = 0 \quad (18)$$

où  $D' = D + i\omega$ .

Toutefois,  $D'$  correspond à une dimension fractale complexe. Pour trouver  $V(\varepsilon)$ , il faut dériver par le logarithme de la résolution l'équation (17), ce qui donne :

$$\frac{d^2 V(\varepsilon)}{(d \ln \varepsilon)^2} - D \frac{dV(\varepsilon)}{d \ln \varepsilon} = \frac{d\chi(\varepsilon)}{d \ln \varepsilon} \quad (19)$$

Dans l'équation (19), on remplace  $\frac{d\chi(\varepsilon)}{d \ln \varepsilon}$  par sa valeur

$D' \chi(\varepsilon)$ , ce qui correspond, finalement à une équation différentielle du second ordre :

$$\frac{d^2 V(\varepsilon)}{(d \ln \varepsilon)^2} - (D + D') \frac{dV(\varepsilon)}{d \ln \varepsilon} + (DD') V(\varepsilon) = 0 \quad (20)$$

L'équation (20) correspond à un modèle d'équation différentielle connu dont la solution est :

$$V(\varepsilon) = V_0 \varepsilon^D (1 + b \varepsilon^\delta) \quad (21)$$

où  $\delta = i\omega$ .

En posant l'équation (21) sous sa forme trigonométrique, on obtient :

$$V(\varepsilon) = V_0 \varepsilon^D (1 + b \cos(\omega \ln \varepsilon)) + i (V_0 b \varepsilon^D \sin(\omega \ln \varepsilon)) \quad (22)$$

Dans l'équation (22), on exige, tout comme dans le paragraphe précédent, que la partie imaginaire soit négligeable, et on obtient la correction log-périodique dépendante d'échelle :

$$V(\varepsilon) = V_0 \varepsilon^D (1 + b \cos(\omega \ln \varepsilon)) \quad (23)$$

Autrement dit, le simple fait d'avoir un : « plus un » supplémentaire par rapport à la formule de Didier Sornette (équation 15) suffit à la transformer en une relation dépendante d'échelle, et à obtenir une équation plus pratique.

#### 4.3. La loi rang-taille parabolique et la correction log-périodique

Nous nous sommes longtemps questionnés face à nos données pour savoir si la meilleure solution était une correction log-périodique associée à une invariante d'échelle ou correspondant à une dépendante d'échelle complexe.

Le plus simple a été de les tester toutes les deux. A l'issue de ces calculs, il s'est avéré que nous avions à faire à une dépendance d'échelle log-périodique. Contrairement à la théorie, nous n'allons pas ajouter une valeur critique, car, ici, ce n'est pas nécessaire puisque l'inverse du rang ordonné de façon décroissante

tend vers zéro. Nous allons donc multiplier l'équation (10) par une correction log-périodique, ce qui donne :

$$V = C\varepsilon^{a \ln \varepsilon + b} (1 + \beta \cos(\omega \ln \varepsilon)) \quad (24)$$

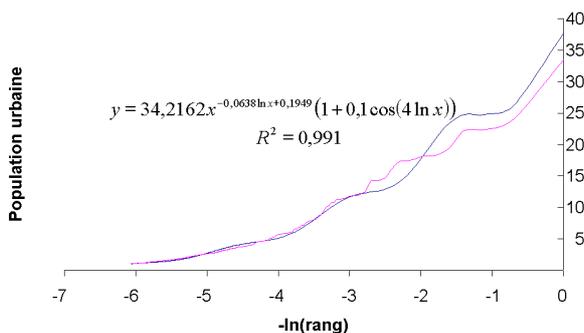
dans notre cas,  $\beta = 0,1$  et  $\omega = 4$ , en première approximation.

Dans ce cas, la dimension fractale sera égale à :

$$D' = \frac{d \ln V}{d \ln \varepsilon} = (2a \ln \varepsilon + b) + 4i \quad (25)$$

Il faut remarquer que la partie réelle est une fonction. Il n'y a donc aucune raison d'interdire la mise en fonction de la partie imaginaire de  $D'$  ce qui permettrait d'obtenir un meilleur ajustement. En plus, c'est peut-être par la partie imaginaire que l'on pourrait introduire l'espace géographique dans les lois rang-taille. Elle correspond peut-être à la dimension fractale du nuage de points des villes étudiées. Les données n'étant pas à notre disposition pour vérifier cette hypothèse, la question restera ouverte.

Comme les lois de puissance, cette correction log-périodique demeure profondément analytique. Il faut essayer maintenant d'identifier les variables la paramétrant. A quoi correspondent  $\beta$  et  $\omega$  ? Cela reste à établir. Autrement dit, sans relation annexe, il est extrêmement difficile de paramétrer la courbe. Pourtant, de nombreux phénomènes en géographie présentent clairement, de manière intuitive, des oscillations log-périodiques, mais il est extrêmement difficile de les paramétrer. Toutefois, la figure 7 montre bien qu'un ajustement log-périodique est beaucoup plus pertinent pour la loi  $\ln$  rang vs population urbaine, même si le coefficient de détermination est un peu plus faible.



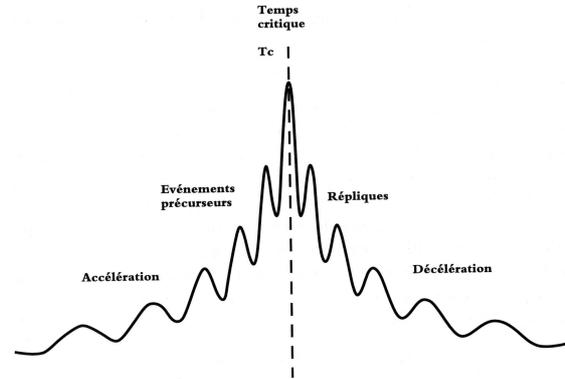
**Figure 7. Ajustement parabolique corrigé par une loi log-périodique**

Cela étant il est aussi possible d'aborder ces structures d'ordre en discrétisant les lois correspondantes.

## 5. La discrétisation des lois log-périodiques

Il est clair que les oscillations décrites dans la figure 6 se retrouvent dans le graphique proposé par Jean Chaline

et Didier Marchand en 2002 (figure 8). Sur la base de cette homologie de formes, mais pas seulement, Laurent Nottale a réussi à théoriser cette relation log-périodique sous la forme d'une chaîne de Markov puisqu'on y observe qu'un événement au temps  $T_n$  dépend uniquement de celui au temps  $T_{n+1}$  et de celui au temps  $T_{n-1}$ . En conséquence, on peut écrire les équations envisagées ci-dessous à partir de ces trois valeurs. Il est possible d'envisager les oscillations discutées pour ce type de modèle, sous une forme discrète.



**Figure 8. Exemple schématique des deux apparences d'une loi log-périodique (in Chaline J. et Marchand D., 2002 d'après D. Sornette, 1998, complété)**

Ainsi, la discrétisation des lois log-périodiques a été utilisée, entre autres, par Laurent Nottale (Nottale et coll., 2000) sous la forme d'une relation de récurrence :

$$V_{n+1} = V_C + \frac{V_n - V_C}{g} \quad (26)$$

### 5.1. La théorie

Cette approche est intéressante dans la mesure où  $V_C$  et  $g$  sont des paramètres assez simples à estimer.  $V_C$  est ce que l'on appelle la valeur critique. Il s'agit d'une valeur vers laquelle converge ou diverge la série. Il n'y a pas vraiment de condition sur  $V_C$ , si ce n'est que cette valeur doit être choisie à l'extérieur de la série des données.  $g$  est, par contre, un rapport d'échelle constant qui permet de lier toutes les données. On peut estimer  $g$  et  $T_C$  de la manière suivante :

$$g = \frac{V_{n+2} - V_{n+1}}{V_{n+1} - V_n} \quad (27) ;$$

$$V_C = \frac{gV_{n+1} - V_n}{g-1} \quad (28).$$

Il faut noter qu'il existe de nombreuses autres formules équivalentes à (27) et (28).

Pour l'instant, cette méthode n'a été appliquée qu'à des séries chronologiques. La valeur critique a donc été un temps critique (qui est l'équivalent d'un rang).

Toutefois, on pourrait imaginer appliquer cette méthode à un ordre spatial, ce qui est bien sûr plus compliqué. En effet, le temps n'a qu'une dimension tandis que l'espace géographique en a au minimum deux.

Nous allons pour illustrer cette présentation rapidement développer deux exemples de lois fractales log-périodiques discrètes.

### 5.2. La série chronologique du château de Boves

Le tableau 1 résume l'application réalisée pour la série chronologique archéohistorique de la motte de Boves (Forriez, 2005 ; Forriez et Martin, 2008). Il montre deux régimes : un régime de création et un régime de destruction. On passe de l'un à l'autre grâce à une bifurcation temporelle.

Des travaux sont en cours pour relier cette analyse temporelle à une analyse spatiale, mais cette mise en relation demande des développements mathématiques beaucoup plus lourds que ceux développés dans cet article.

n	Date réelle	Date prévue
1	920	920
2	960	959
3	1025	1028
4	1140	1150
5	1360	1366
Bifurcation		
6	1604	1600
7	1945	1944

Tableau 1. Modélisation de la série chronologique de Boves

La qualité des dates prévues comparées aux dates observées ne manque pas de soulever d'énormes problèmes si l'on considère que le modèle rend compte d'une dimension fondamentale du monde qui transparaîtrait dans l'histoire de France.

### 5.3. L'exemple de découverte et d'exploration de nouvelle(s) cavité(s) de plus de 1000 mètres

Le tableau 2 présente une autre application temporelle. On y retrouve également deux régimes : l'un correspondant à la période de fermeture des pays sous domination soviétique où l'exploration spéléologique était très limitée - ces territoires étant en outre inaccessibles aux Occidentaux - et l'autre à leur ouverture, ce qui a permis d'accroître fortement les

espaces explorables par des équipes venant du monde entier.

On notera que le modèle intègre parfaitement la date de la chute du mur de Berlin qui ouvre de fait les espaces ex-communistes, mais que, dans la réalité, il faudra 4 ans pour que cela se traduise dans les statistiques spéléologiques. Quand on sait que ce type d'exploration se fait sur des « camps d'été » qui se prévoient donc d'année en année, et que le premier d'une série, sur une zone, est généralement plus tourné vers une estimation des potentiels et vers la faisabilité technique, juridique, etc. que tout autre chose, il n'est pas étonnant de trouver un tel décalage. Celui-ci s'est progressivement comblé pour disparaître en 2006 (statistiques de 2007 de la Fédération Française de Spéléologie *in Spelunca*).

Exploration de nouvelles cavités > 1000 m		
n	Date réelle	Date prévue
1	1956	1956
2	1966	1971
3	1978	1980
4	1981	1985
5	1988	1987
6	1993	1989
Bifurcation		
7	1997	1997
8	1998	2001
9	1999	2003
10	2001	2004
11	2003	2005
12	2006	2006

Tableau 2. Modélisation de la série chronologique du résultat de la découverte et de l'exploration de nouvelles cavités supérieures à 1000 m de profondeur dans le monde

## 6. Conclusion

Dans ce texte, on est donc passé analytiquement d'un modèle fractal linéaire (droite, parabole) à un modèle non linéaire (puissance corrigée par une loi log-périodique) pour essayer de mieux expliquer la relation entre la taille de la population des villes et leur rang (décroissant). Cela signifie d'abord que ce type de distribution n'est pas invariant d'échelle, comme on peut trop le lire. Toutefois, cela ne signifie pas qu'elle ne soit pas fractale, au contraire, ce que montre la construction de ces lois dans un cadre théorique adapté. Autrement dit, la relativité d'échelle permet, non seulement, de clarifier la notion mathématique de « fractale », mais aussi son utilisation. A long terme, il n'est pas impossible d'envisager un modèle prédictif à partir des lois rang - taille.

---

## 7. Références bibliographiques

- Al Khalifeh S., Martin P., 2007, Structure fractale du bâti de l'agglomération d'Avignon (France), 8<sup>e</sup> Théo Quant, Besançon, 104-105.
- Al Khalifeh S., 2008, L'apport de la télédétection dans l'observation de l'étalement urbain. L'exemple de l'agglomération d'Avignon – France, Thèse de doctorat, Université d'Avignon et des Pays de Vaucluse, 417.
- Arlinghaus S. L., 1985, Fractal take a central place, *Geographiska Annaler*, 67B, 83-88.
- Arlinghaus S. L., Arlinghaus, W. C., 1989, The fractal theory of central place geometry: a diophantine analysis of fractal generators for arbitrary Löshian numbers, *Geographical Analysis*, 21, 2.
- Armatte M., 1995, Robert Gibrat et la loi de l'effet proportionnel, *Mathématiques et sciences humaines*, 129, 5-35.
- Bak P., 1999, *Quand la nature s'organise. Avalanches, tremblements de terre et autres cataclysmes*. Flammarion, Paris.
- Chaline J., Marchand, D., 2002, *Les merveilles de l'évolution*, Éditions universitaires de Dijon, 268.
- Christaller W., 1933, *Die zentralen orte in Süddeutschland : eine ökonomisch-geographische untersuchung über die gesetz massigkeit der verbreitung und entwicklung der siedlungen mit städtischen funktionen*, Jean, Fischer Verlag.
- Depraetere C., 1991, Le phénomène insulaire à l'échelle du globe : taille, hiérarchies et formes des îles océanes. *L'Espace Géographique*, 2, 126-134.
- Dubois J., 1995, *La dynamique non linéaire en physique du globe*, Masson, Paris.
- Forriez M., 2005, *La motte de Boves permet-elle de mener une réflexion épistémologique commune en archéologie, en géographie et en histoire ?*, Arras, Mémoire de master 1.
- Forriez M., Martin P., 2006, De l'utilité de la théorie de la relativité d'échelles de L. Nottale en géographie. Recherche d'un modèle scalaire spatio-temporel. *Géopoint 2006 : Demain la géographie*, Avignon, Groupe Dupont et UMR ESPACE 6012 du CNRS éditeurs, Brouillon Dupont, 63-64.
- François N., Frankhauser P., Pumain D., 1995, Ville densité et fractalité, *Les Annales de la Recherche Urbaine*, 67, 55-64.
- Frechet M., 1941, Sur la loi de répartition de certaines grandeurs géographiques, *Journal de la Société Statistique de Paris*, 82, 114-122.
- Gibrat R., 1931, *Les inégalités économiques*, Sirey, Paris.
- Guérin-Pace F., 1993, *Deux siècles de croissance urbaine. La population des villes françaises de 1831 à 1990*, Anthropos, Paris.
- Korcak J., 1940, Deux types fondamentaux de distributions statistiques, *Bulletin de l'Institut International de Statistique*, 30, 295-299.
- Laherrère J., 1996, Distributions de type " fractal parabolique " dans la nature, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, t.322, série IIa, 535-541.
- Laherrère J., Sornette D., 1998, Stretched exponential distributions in nature and economy: « Fat tails » with characteristic scales, *European physical journals*, B2, 525-538. [<http://xxx.lanl.gov/abs/cond-mat/98011293>]
- Lam S., De Cola L., 1993, *Fractal in geography*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- Le Bras, H., 2000, *Essai de géométrie sociale*, Odile Jacob, Paris.
- Lösch A., 1940, *Die räumliche ordnung der wirtschaft*, Fischer, Iena.
- Mandelbrot B., 1975, *Les objets fractals*, Flammarion, Paris.
- Mandelbrot B., 1997, *Fractale, hasard et finance*, Flammarion Paris.
- Moriconi-Ebrard F., 1993, *L'urbanisation dans le monde depuis 1950*, Paris, Anthropos.
- Nottale L., 1993, *Fractal space-time et microphysics. Towards a theory of scale relativity*, World scientific, Singapour.
- Nottale L., 1997, *Scale invariance and beyond*, EDP sciences Springer.
- Nottale L., 1998, *La relativité dans tous ses états*. Hachette, Paris.
- Nottale, L., Chaline J., Grou P., 2000, *Les arbres de l'évolution*, Hachette, Paris.
- Pareto V., 1896, *Cours d'économie politique*. In Pareto Œuvres complètes. Réimpression Droz, Genève, 1965.
- Pumain D., Moriconi-Ebrard F., 1997, City size distributions and metropolisation, *Geojournal*, 43, 307-314.
- Pumain D., 1982, *La dynamique des villes*, Economica, Paris.
- Pumain D., 2006a, Système de villes et niveaux d'organisation, in Bourguin P., Lesne A., *Morphogenèse*. Belin, Paris, 236-263.
- Pumain D. (s.d.), 2006b, *Hierarchy in natural and social sciences*, Dordrecht, Springer, X-244
- Schroeder M., 1991, *Fractals, Chaos, Power Laws: Minute from an infinite paradis*, Feeman editor, New York.
- Sornette D., 2000, *Critical phenomena in natural sciences. Chaos, fractals, selforganization and disorder: concepts and tools*, Springer éditeur, New York.
- Zipf G. K., 1932, *Selective studies and the principle of relative frequency in language*.
- Zipf G. K., 1935, *Psycho-biology of languages*, Houghton-Mifflin, New York.
- Zipf G. K., 1941, *National unity and disunity. The nation as a bio-social organism*, Principia Press, Bloomington Indiana.
- Zipf G. K., 1949, *Human behavior and the principle of least effort*, Addison-Wesley.